数理解析研究所講究録
239巻 1975年 108-123

双曲型方程式に対する混合問題の基本解の singular supports について

京産大 理 辻 幹雄

§.1. 序. quarter space において定数係数双曲型混合問題の基本解の singular support の構造について研究する。この課題に関しては Duff の基本的な論文（[2]）がある。彼の結果は大変精密であるが、しかし理解するのに困難な点がある様に思われる。松村氏（[4]）は L. Hörmander [3] 及び Atiyah-Bott-Gårding [1] により発展させられた "Localization theorem" を用いて、この問題を研究した。しかし彼は反射係数にあらわれる branch points における基本解の解析を試みなかったので、混合問題特有の現象 —— lateral wave の存在 —— は説明されていない。ここでは branch point における解析を主眼とする。そのためには [1] における様な "局所化定理" では不十分であるので、それを更に一般化する。この点がこの報告の key point である。（定理1）

§2. 記号及び基本解の表現.

$\Omega = \{(t, x, y)\,;\, t>0,\ x>0,\ y \in \mathbb{R}^n\}$ とおく。 Ω において次の問題を考える:

$$
(2.1)\quad
\begin{cases}
P(D_t, D_x, D_y)\,u = 0 & \text{in } \Omega\,, \\
B_j(D_t, D_x, D_y)\,u = 0 & \text{on } \overline{\Omega}\cap\{x=0\} \\
 & ,\ j = 1, 2, \cdots, \mu, \\
(u, D_t u, \cdots, D_t^{m-1}u) = (0, 0, \cdots, i\,\delta_{(x-l, y)}) & \text{on } \overline{\Omega}\cap\{t=0\}
\end{cases}
$$

where i) $D_t = -i\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x = -i\frac{\partial}{\partial x}$, $D_y = -i\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right)$, ii) $l>0$, iii) P and B_j ($j=1, 2, \cdots, \mu$) are homogeneous differential operators of degree m and m_j ($j=1, 2, \cdots, \mu$) with constant coefficients. ここで次の仮定をおく。

(A.1) P は t-方向に strictly hyperbolic である。

(A.2) $x=0$ は P に対して non-characteristic である。

(A.3) 混合問題 (2.1) は $\mathcal{E}$-well posed である。

$\mathcal{E}$-well posedness については [5] において必要十分条件が得られている。 (t, x, y) の dual coordinates を $(\sigma, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^{n+2}$ とかき $\tau = \sigma - i\gamma$ ($\gamma>0$) とおく。 (A.1) より $P(\tau, \xi, \eta) = 0$ を ξ について解くと $\mathrm{Im}\,\xi \neq 0$. (A.3) より $P(\tau, \xi, \eta) = 0$ の $\mathrm{Im}\,\xi > 0$ の根の個数は μ 個である。即ち境界条件の個数と一致する。ここで P を次の様に表現する:

$$
\begin{aligned}
P(\tau, \xi, \eta) &= \mathrm{const.}\ \Pi_{j=1}^{\mu}\left(\xi - \xi_j^+(\tau, \eta)\right)\cdot \Pi_{j=1}^{m-\mu}\left(\xi - \xi_j^-(\tau, \eta)\right) \\
&= \mathrm{const.}\ P_+(\tau, \eta\,;\,\xi)\cdot P_-(\tau, \eta\,;\,\xi)\,,\quad (\mathrm{Im}\,\xi_j^{\pm} \gtrless 0).
\end{aligned}
$$

$E_0(t,x,y;l)$ を $P(D_t,D_x,D_y)E_0=\delta_{(t,x-l,y)}$ in $\mathbb{R}^{n+2}$ の解とすると E_0 は次の様に表現出来る。

$$E_0(t,x,y;l)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2}\int_{R^{n+2}}\frac{e^{i(t\tau+(x-l)\xi+y\eta)}}{P(\tau,\xi,\eta)}\,d\sigma d\xi d\eta.$$

u を (2.1) の解とし $u-E_0=E_1$ とおくと $E_1(t,x,y;l)$ は

$$(2.2)\begin{cases}P(D_t,D_x,D_y)\,E_1=0 & \text{in } \Omega\\ B_j(D_t,D_x,D_y)\,E_1=g_j & \text{on } \overline{\Omega}\cap\{x=0\},\ j=1,2,\ldots,\mu,\\ (E_1,D_tE_1,\ldots,D_t^{m-1}E_1)=(0,0,\ldots,0) & \text{on } \overline{\Omega}\cap\{t=0\}\end{cases}$$

を満たす。上の式における g_j は次の様に表わされる：

$$g_j=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+2}\int_{R^{n+2}}\frac{B_j(\tau,\xi,\eta)\,e^{i(t\tau-l\xi+y\eta)}}{P(\tau,\xi,\eta)}\,d\sigma d\xi d\eta.$$

一方

$$P(D_t,D_x,D_y)\,E_1=0 \quad \text{in } \{(t,y)\in\mathbb{R}^{n+1},\ x>0\}$$

を満足する temparate distribution E_1 は次の様に書ける：

$$E_1=\sum_{j=1}^{\mu}\int_{R^{n+1}}\left(C_j\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_+}\frac{\xi^{j-1}e^{ix\xi}}{P_+(\tau,\eta;\xi)}d\xi\right)e^{i(t\tau+y\eta)}\,d\sigma d\eta$$

where Γ_+ is a simple closed path containing all $\xi_i^+(\tau,\eta)$.

これを (2.2) に代入し，境界条件を考慮して $C_j(\tau,\eta)$ を求めると

$$C_j=\sum_{k=1}^{\mu}\frac{R_{jk}(\tau,\eta)g_k}{R(\tau,\eta)}=-\sum_{k=1}^{\mu}\frac{1}{2\pi}\int_{R^1}\frac{R_{jk}(\tau,\eta)B_k(\tau,\xi',\eta)\,e^{-il\xi'}}{R(\tau,\eta)P_-(\tau,\eta;\xi')}d\xi'$$

where

$$L(\tau,\eta) \underset{\text{def.}}{=} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{B_j(\tau,\xi,\eta)\,\xi^{k-1}}{P_+(\tau,\eta;\xi)}\, d\xi \right]_{1\leqq j,k\leqq \mu},$$

$$R(\tau,\eta) \underset{\text{def.}}{=} \det L(\tau,\eta) \quad ,$$

$$R_{jk}(\tau,\eta) \underset{\text{def.}}{=} (k,j)\text{-cofactor of } L(\tau,\eta) .$$

従って $E_1(t,x,y;l)$ は次の様に表現出来る。

$$(2.3) \quad E_1 = \sum_{j,k=1}^{\mu} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3} \int_{R^{n+3}} \frac{R_{jk}(\tau,\eta)\,\xi^{j-1} B_k(\tau,\xi',\eta)\, e^{i(t\tau+x\xi+y\eta-l\xi')}}{R(\tau,\eta)\, P_+(\tau,\eta;\xi)\, P(\tau,\xi',\eta)}\, d\sigma\, d\xi\, d\eta\, d\xi' .$$

sing supp E_0 の位置は既に良く知られているので、sing supp u を調べる為には sing supp E_1 を調べれば良い。

§ 3. Localization theorem.

$P_0 = (\sigma_0, \xi_0, \eta_0, \xi_0')$ を $\mathbb{R}^{n+3}$ の任意の点とする。$\exp\{-is(t\sigma_0+x\xi_0+y\eta_0-l\xi_0')\} \times E_1(t,x,y;l)$ を s について漸近展開する。そのために、まず $P(\tau,\xi,\eta)=0$ の根 ξ の性質について調べる。$P(\tau,\xi,\eta)=0$ の ξ に関する終結式を $D(\tau,\eta)$ とかく。$P(\tau,\xi,\eta)=\prod_{i=1}^{m}(\tau-\lambda_i(\xi,\eta))$ とかくと P は strictly hyperbolic なので i) $\lambda_i(\xi,\eta) \neq \lambda_j(\xi,\eta)$ if $i\neq j$ and $(\xi,\eta)\neq 0$, ii) $\lambda_i(\xi,\eta)$ は degree 1 の斉次函数で $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ で analytic である。従って、$P(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)=0$, $0\neq(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)\in\mathbb{R}^{n+2}$ とすると $\sigma_0=\lambda_k(\xi_0,\eta_0)$ を満足する λ_k が unique に存在する。このとき $P(\sigma_0+r\tau, \xi, \eta_0+r\eta)=0$

を ξ について解き、$r=0$ のとき ξ_0 となる根を $\xi=\xi(\tau,\eta;r)$ とおく。　まずこの ξ の $r=0$ の近傍における挙動を考察する。

[Case 1]　$D(\sigma_0,\eta_0)\neq 0$ の場合。　$P(\sigma_0,\xi,\eta_0)=0$ の ξ に関する根はすべて異っているので $\xi(r)$ は $r=0$ の近傍で analytic であり、かつ $\frac{\partial P}{\partial \xi}(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)\neq 0$ なので $\partial_\xi \lambda_k(\xi_0,\eta_0)\neq 0$ となる。　このとき次の Lemma を得る。

Lemma 1.　$\xi(r)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\tau,\eta)\, r^k$ と展開すると

$$a_1(\tau,\eta)=\frac{\partial \xi}{\partial \tau}(\sigma_0,\eta_0)\,\tau+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \xi}{\partial \eta_j}(\sigma_0,\eta_0)\,\eta_j$$
$$=\left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial \xi}(\xi_0,\eta_0)\right)^{-1}\left(\tau-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_i}(\xi_0,\eta_0)\,\eta_i\right).$$

（証明の方針）　$\xi(r)$ を直接 $P(\sigma_0+r\tau,\xi,\eta_0+r\eta)=0$ に代入し r の係数を比較すれば得られる。

Lemma 2.　$R(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)$ も $r=0$ の近傍で analytic となり、　$R=\left(\sum_{k=0}^{\infty} R_k(\tau,\eta)\, r^k\right) r^{\rho_0}$　$(\rho_0\geq 0)$ と展開すると　$R_0(\tau,\eta)$ は degree ρ_0 の hyperbolic polynomial となる。

（証明の方針）　$\xi(r)$ が $r=0$ の近傍で analytic なので、R の表現式より $R(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)$ もそうなる事は明らかであろう。　$R_0(\tau,\eta)$ が degree ρ_0 の斉次多項式となる。　更に仮定 (A.3) より「$R(\tau,\eta)\neq 0$ for $\forall\tau=\sigma-i\gamma$ $(\gamma>0)$, $\forall(\sigma,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}$」であり $\lim_{r\to 0} r^{-\rho_0} R(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)=R_0(\tau,\eta)$ なので、

Rouché の定理より $R_0(\tau,\eta) \neq 0$ for $\forall\tau=\sigma-i\gamma\,(\gamma>0)$, $(\sigma,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}$ となる。従って $R_0(\tau,\eta)$ は τ-方向に関して hyperbolic となる。

[Case 2] $D(\sigma_0,\eta_0)=0$ の場合。 ξ_0 を $P(\sigma_0,\xi,\eta_0)=0$ の多重根とすると $P(\tau,\xi,\eta)$ は次の様に表現出来る。

$$(3.1)\quad P(\tau,\xi,\eta)=\left\{(\xi-\xi_0)^{m_1}+b_1(\tau,\eta)(\xi-\xi_0)^{m_1-1}+\cdots+b_{m_1}(\tau,\eta)\right\} \times P_1(\tau,\eta;\xi)$$

$$\equiv P_0(\tau,\eta;\xi)\,P_1(\tau,\eta;\xi)\qquad(m_1\geqq 2)$$

where i) $b_i(\sigma_0,\eta_0)=0$ and $b_i(\tau,\eta)$ is analytic in a nbd of (σ_0,η_0), ii) $P_1(\sigma_0,\eta_0;\xi_0)\neq 0$。 しかし、$P_1(\sigma_0,\eta_0;\xi)=0$ は ξ_0 以外の real multiple roots を持つ可能性はある。従って $\xi(\tau,\eta;0)=\xi_0$ を満たす $P(\sigma_0+r\tau,\xi,\eta_0+r\eta)=0$ の根の数は m_1 である。それらを $\xi_1(\tau,\eta;r),\cdots,\xi_{m_1}(\tau,\eta;r)$ と記す。

Lemma 3. $\xi_i(\tau,\eta;r)$ を r に関して $\xi_i=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(\tau,\eta)\,r^{\frac{k}{m_1}}$ と Puiseaux 展開すると、次の事実が成立する。

i) $c_1(\tau,\eta)=\text{const.}\left(\tau-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\lambda_k}{\partial\eta_j}(\xi_0,\eta_0)\,\eta_j\right)^{\frac{1}{m_1}}$,

ii) 任意の $c_k(\tau,\eta)$ に対して ある整数 p を適当にとれば $c_1(\tau,\eta)^p\times c_k(\tau,\eta)$ は (τ,η) の多項式となる。

(証明の方針)

i) $\xi_i(\tau,\eta;r)$ を $P(\sigma_0+r\tau,\xi,\eta_0+r\eta)=0$ に代入して r の係数を比較する。その際、$b_i(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)$ が $r=0$ の近傍

で正則であるという事実を考慮すれば、結局

$$(3.2)\quad C_1(\tau,\eta)^{m_1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \eta_j}(\sigma_0,\eta_0)\eta_j + \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \tau}(\sigma_0,\eta_0)\tau = 0$$

を得る。(3.1) より

$$\frac{\partial b_{m_1}}{\partial \tau}(\sigma_0,\eta_0) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \tau}(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)}{P_1(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)}, \quad \frac{\partial b_{m_1}}{\partial \eta_j}(\sigma_0,\eta_0) = \frac{\frac{\partial P}{\partial \eta_j}(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)}{P_1(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)}$$

なので、この事実を (3.2) に代入すれば

$$C_1(\tau,\eta)^{m_1} = \text{const.}\left(\tau - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_j}(\xi_0,\eta_0)\eta_j\right)$$

$$\neq 0 \quad \text{for } \tau = \sigma - i\gamma \ (\gamma > 0).$$

これより i) が得られた。

以下同様に $P(\sigma_0+r\tau, \xi_i(r), \eta_0+r\eta) = 0$ を r について展開したときの r の中の係数を 0 とおけば ii) が得られる。(終)

Lemma 4. $P(\sigma_0,\xi,\eta_0)=0$ を ξ について解いたとき、real multiple roots を $\xi_1^0, \cdots, \xi_q^0$, その多重度を $m_1, \cdots, m_q$ とおく。更に $\sigma_0 = \lambda_{k_i}(\xi_i^0,\eta_0)$ とおく。$R(\sigma_0+r\tau, \eta_0+r\eta)$ を r に関して $R = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\tau,\eta) r^{\rho_k}$ $(\rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_n < \cdots)$ と Puiseux 展開すれば

i) $$R_0(\tau,\eta) = \sum_{\deg Q_\beta + \sum_{i=1}^{q} \frac{\beta_i}{m_i} = \rho_0} Q_\beta(\tau,\eta) \prod_{i=1}^{q} \left(\tau - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{k_i}}{\partial \eta_j}(\xi_i^0,\eta_0)\eta_j\right)^{\frac{\beta_i}{m_i}}$$

where Q_β is polynomial and $\beta_i \geqq 0$. 更に次の事実が従う:

ii) $R_0(\tau,\eta) \neq 0$ for ${}^\forall \tau = \sigma - i\gamma$ $(\gamma>0)$, ${}^\forall(\sigma,\eta) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

（証明の方針）［Lemma 3］において得られた結果を R の表現式に代入して、r について展開すればi) が得られる。この際 $\rho_0, \rho_1, \rho_2 \cdots$ は有理数となる。ii) は Lemma 2 の証明と同様に Rouché の定理を使えばよい。（終）

Remark ここで更に次の仮定を設ける。

(A.4) $P(\sigma, \xi, \eta) = 0$ が ξ に関して解いたとき実多重根が存在するとき、その多重根の個数は高々一つである。

すると［Lemma 4］において $R_0(\tau, \eta)$ は次の様に表現出来る：

$$R_0(\tau, \eta) = r_0(\tau, \eta)\left(\tau - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \lambda_k}{\partial \eta_j}(\xi_0, \eta_0)\eta_j\right)^{\beta}$$

where $r_0(\tau, \eta)$ is hyperbolic with respect to τ. この式において ξ_0 は $P(\sigma_0, \xi, \eta_0) = 0$ を満たす実多重根であり、λ_k は $\sigma_0 = \lambda_k(\xi_0, \eta_0)$ を満たす。即ち仮定 (A.4) により $R_0(\tau, \eta)$ の表現が美しくなる。しかし、以下に述べる［定理 1］の証明には (A.4) は不要である。

Seidenberg の補題により $R(\tau, \eta)^{-1}$ を次の様に評価出来る。

<u>Lemma 5.</u> ρ_0 を Lemma 2 及び Lemma 4 に現れる ρ_0 とする。すると次の様な評価が成りたつ。

$$\sup_{0 < r < r_0} \left| r^{-\rho_0} R(\sigma_0 + r\tau, \eta_0 + r\eta) \right|^{-1} \leqq K\left(|\tau| + |\eta|\right)^{\beta}$$

where r_0 and β are constant independent of (τ, η) and r.

最後に distributions に関する公式を1つ述べておく。

Lemma 6. $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\neq 1,2,\dots,n,\cdots$ とすると

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{R^{n+1}}\left(\tau-\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j\right)^{\alpha}e^{i(t\tau+y\eta)}\,d\sigma d\eta=\frac{e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{\Gamma(-\alpha)}\,t_+^{-1-\alpha}\cdot\delta(y+ta)$$

where $t_+^k=t^k$ for $t>0$, and $=0$ for $t<0$.

以上の準備のもとに $E_1(t,x,y;l)$ を局所化する事を試みる。

$$e^{-is(t\sigma_0+x\xi_0+y\eta_0-l\xi_0')}E_1(t,x,y;l)$$

$$=s^{-m-1}\sum_{j,k=1}^{\mu}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3}\int_{R^{n+3}}\frac{R_{jk}(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)(\xi_0+r\xi)^{j-1}B_k(\sigma_0+r\tau,\xi_0'+r\xi',\eta_0+r\eta)}{R(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta)P_+(\sigma_0+r\tau,\eta_0+r\eta;\xi_0+r\xi)}$$

$$\times\frac{e^{i(t\tau+x\xi+y\eta-l\xi')}}{P(\sigma_0+r\tau,\xi_0'+r\xi',\eta_0+r\eta)}\,d\sigma d\xi d\eta d\xi'$$

$$\equiv s^{-m-1}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3}\int_{R^{n+3}}G(\sigma_0+r\tau,\xi_0+r\xi,\eta_0+r\eta;\xi_0'+r\xi')$$

$$\times e^{i(t\tau+x\xi+y\eta-l\xi')}d\sigma d\xi d\eta d\xi'$$

($r=1/s$) とおく。Lemma 1 ~ Lemma 4 を用いて G を r について展開する。($(\sigma_0,\xi_0,\eta_0,\xi_0')=P_0$ は $P(\sigma_0,\xi_0,\eta_0)=P(\sigma_0,\xi_0',\eta_0)=0$ を満たす様にとってある。点 P_0 がこの性質を持たぬとき P_0 で局所化しても無駄であるから。) すると

$$G(r)=\sum_{k=0}^{\infty}G_k(\underbrace{\tau,\xi,\eta,\xi'}_{;P_0})\,r^{\beta_k},\ \beta_0<\beta_1<\beta_2<\cdots \tag{3.2}$$

と展開出来る。

$D(\sigma_0,\eta_0)\neq 0$ のとき β_i は整数であり、$D(\sigma_0,\eta_0)=0$ のとき β_i は有理数である。超函数 $F_k(t,x,y,l;P_0)$ を次の様に定義する：

$$(3.3)\quad F_k = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+3}\int_{R^{n+3}} G_k(\tau,\xi,\eta,\xi';P_0)\, e^{i(t\tau+x\xi+y\eta-l\xi')}\, d\sigma d\xi d\eta d\xi'.$$

ここで $e_k = -m-1-\beta_k$ とおき、[Lemma 5] を用いると、次の定理1を得る。

定理 1. 1) 任意の点 $P_0=(\sigma_0,\xi_0,\eta_0,\xi_0')\in\mathbb{R}^{n+3}$ に対して $\exp\{-is(t\sigma_0+x\xi_0+y\eta_0-l\xi_0')\}E_1$ を次の様に漸近展開する事が出来る：

$$(3.4)\quad e^{-is(t\sigma_0+x\xi_0+y\eta_0-l\xi_0')}E_1(t,x,y,l) \sim \sum_{j=0}^{\infty} F_j(t,x,y,l;P_0)s^{e_k}$$

which has the following property : For every integer N the error

$$(3.5)\quad s^{-e_N}\left(e^{-is(t\sigma_0+x\xi_0+y\eta_0-l\xi_0')}E_1 - \sum_{j=0}^{N-1} F_j(t,x,y,l;P_0)s^{e_j}\right)$$

tends to F_N in $\mathcal{D}'(\Omega\times R_+^1)$ when $s\longrightarrow+\infty$.

2) $$\text{sing supp } E_1 \supset \bigcup_{P_0\in\mathbb{R}^{n+3}} \bigcup_{j=0}^{\infty} \text{supp } F_j(t,x,y,l;P_0).$$

$\boxed{\text{Remark 1}}$ ここまでの結果を得るためだけならば、仮定(A.1) のかわりに更に弱い条件 (A.1)′ で置き換える事が出来る。

$(A.1)'\quad P = \prod_{i=1}^{k} P_i(\tau,\xi,\eta)^{m_i}$ where P_i is strictly hyperbolic.

$\boxed{\text{Remark 2}}$ Cauchy problem においては sing supp E（E は基本解）を下から評価するものとして supp F_0 しか考慮しなかった。そして十分とは言えないが相当な成果をあげた。しかし混合問題においては supp F_0 ≠ supp F_j ($j\geq1$) となる場合が起こる。従って、他の F_j の support を考慮す

る必要が起こる。そしてこの事実により双曲型混合問題特有の現象 —— 側面波の存在 —— が説明出来るのである。

最後に F_j を具体的に計算する。

§4. Lateral waves.

$F_j \neq 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega \times R^1_+)$ を満たす F_j が存在したと仮定する。すると点 $P_0 = (\sigma_0, \xi_0, \eta_0, \xi_0') \in \mathbb{R}^{n+3}$ は $P(\sigma_0, \xi_0, \eta_0) = P(\sigma_0, \xi_0', \eta_0) = 0$ という性質を持たねばならぬ。そこで $\sigma_0 = \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0)$, $\sigma_0 = \lambda_{k_2}(\xi_0, \eta_0)$ とおく。すると

$$P(\sigma_0 + r\tau, \xi_0 + r\xi, \eta_0 + r\eta) = \mathrm{const}\left(\tau - \langle \operatorname{grad}_{(\xi,\eta)} \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0), (\xi, \eta)\rangle\right) r + O(r^2)$$

となるので G_j は一般的に次の様に表現出来る：

$$G_j = \frac{H_j(\tau, \xi, \eta, \xi')}{R_0(\tau, \eta)^{\alpha_j} \left(\tau - \langle \operatorname{grad}_{(\xi,\eta)} \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0), (\xi, \eta)\rangle\right)^{\beta_j} \left(\tau - \langle \operatorname{grad} \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0), (\xi', \eta)\rangle\right)^{\gamma_j}} \tag{4.1}$$

where $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

$j = 0$ のときは $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1$ かつ

$H_0 = \mathrm{const}. \sum_{j,k=1}^{\mu} R_{jk}(\sigma_0, \eta_0)\, \xi_0^{j-1} B_k(\sigma_0, \xi_0', \eta_0)$ となる。

従って (3.3) で def. される G_j の逆 Laplace-Fourier 像 F_j が $\mathcal{D}'(\Omega \times R^1_+)$ で 0 でないためには

$$\partial_\xi \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0) > 0 \text{ かつ } \partial_\xi \lambda_{k_1}(\xi_0, \eta_0) \leqq 0 \tag{4.2}$$

でなければならない。

[Case I] $D(\sigma_0, \eta_0) \neq 0$ のとき. ξ_0 は多重根でないので.

$\partial_\xi \lambda_{k_1}(\xi_0,\eta_0)<0$ である。 更に $R_0(\tau,\eta)$ は hyperbolic polynomial, H_j は多項式となるので F_jを計算する事は難しくない。

[Case II] $D(\sigma_0,\eta_0)=0$ のとき。 $P_0=(\sigma_0,\xi_0,\eta_0,\xi_0')$ で E_1を局所化する際、ξ_0を $P(\sigma_0,\xi,\eta_0)=0$ の多重根でない様にとる。そして、実多重根をξ_0とおき、λ_jを $\sigma_0=\lambda_j(\xi_0,\eta_0)$を満たす様にとる。すると $R_0(\tau,\eta)$, $H_j(\tau,\xi,\eta,\xi')$ に Lemma 3 で述べた様な branch point が現れる。Lemma 6 により branch point は singularity の派生源となる事が判っているので、かかる特異点の扱い方が問題となる。

今後、簡単のため仮定(A.4) (Page 8にある)の下で考える。すると $P(\sigma_0,\xi,\eta_0)=0$ を満たす多重根はξ_0だけである事がわかる。従って R_0は次の様に表現出来る。

(4.3) $$R_0(\tau,\eta)=r_0(\tau,\eta)\left(\tau-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\lambda_j}{\partial\eta_i}(\xi_0,\eta_0)\eta_i\right)^{\alpha}\quad(\alpha\geq 0).$$

更に (4.1) における H_j も (多項式)$\times\left(\tau-\sum_{i=1}^{n}\partial_{\eta_i}\lambda_j(\xi_0,\eta_0)\eta_i\right)^{\alpha'}$ (α'は有理数) と表現出来る事がわかる。故にG_jは一般的に

(4.1)' $$G_j=\frac{K_j(\tau,\xi,\eta,\xi')\left(\tau-\sum_{i=1}^{n}\partial_{\eta_i}\lambda_j(\xi_0,\eta_0)\eta_i\right)^{\mu_j}}{r_0(\tau,\eta)^{\kappa_j}\left(\tau-\langle \operatorname{grad}_{(\xi,\eta)}\lambda_{k_1}(\xi_0,\eta_0),(\xi,\eta)\rangle\right)^{\beta_j}\left(\tau-\langle \operatorname{grad}_{(\xi,\eta)}\lambda_{k_2}(\xi_0',\eta_0),(\xi',\eta)\rangle\right)^{\gamma_j}}$$

where K_j is polynomial と表現出来る。

$$T_{\kappa_j}(t,y)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1}\int_{R^{n+1}}\frac{e^{i(t\tau+y\eta)}}{r_0(\tau,\eta)^{\kappa_j}}\,d\sigma\,d\eta$$

とおくと $\overbrace{\gamma_j > 0}^{\text{かつ } \mu_j \neq 1,2,\cdots}$ のとき（$\gamma_j = 0$ ならば $F_j \equiv 0$ なので）

(4.4) $$F_j(t,x,y,\ell) = \mathrm{const}\, K_j(D_t, D_x, D_y, -D_\ell)\Big\{ \Big(t_+^{-1-\mu_j}\,\delta_{((x,y)+t\,\mathrm{grad}_{(\xi,\eta)}\lambda_j(\xi_0,\eta_0))}\Big) \underset{(t,x,y)}{*} \Big(t_+^{-1+\beta_j}\,\delta_{((x,y)+t\,\mathrm{grad}_{(\xi,\eta)}\lambda_{k_1}(\xi_0,\eta_0))}\Big) \underset{(t,x,y)}{*} \Big(T_{\gamma_j}(t,y)\otimes\delta_x\Big)\Big\}(t-a_0\ell,\, 0,\, y+\ell a)$$

where $a_0 = \left(\partial_\xi \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0)\right)^{-1}$, $a = a_0\, \mathrm{grad}_\eta \lambda_{k_2}(\xi_0', \eta_0)$.

となる。そして定理1より

(4.5) $\quad \mathrm{sing\,supp}\, E_1 \supset \mathrm{supp}\, F_j, \quad j = 0, 1, 2, \cdots ,$

が成立している。

(4.4), (4.5) により lateral wave について説明する。簡単のため $r_0(\tau, \eta) =$ constant の場合を考える。すると (4.4) において $T_{\gamma_j}(t, y) \otimes \delta_x$ の部分はなくなる。従って

(4.6) $$\mathrm{supp}\, F_j = S_1 + S_2 \equiv \{(t_1+t_2, x_1+x_2, y_1+y_2);\ (t_i, x_i, y_i) \in S_i,\ i=1,2\}$$

where $S_1 = \{\partial_{\eta_i}\lambda_j(\xi_0,\eta_0)(t-a_0\ell) + y_i + a_i\ell = 0 \ (i=1,2,\ldots,n),\ x=0;\ t-a_0\ell > 0\}$ and $S_2 = \{\partial_{\eta_i}\lambda_{k_1}(\xi_0,\eta_0)(t-a_0\ell) + y_i + a_i\ell = 0 \ (i=1,2,\ldots,n),\ t_0 - a_0\ell > 0,\ \partial_\xi\lambda_{k_1}(\xi_0,\eta_0)(t-a_0\ell) + x = 0\}$.

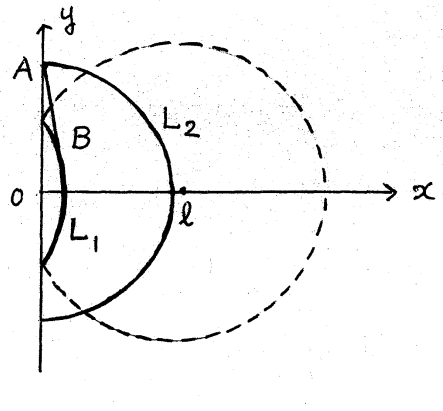
点 $(0, \ell, 0)$ に擾乱を与えたとき $-a_0^{-1}(1, a)$ の方向に進んだ波が壁 $x=0$ に衝突後生じた反射波に相当するのが上記の S_2 である。(4.5) は反射波だけでなく、他の wave「$S_1 + S_2$」が生じる事を意味している。これを lateral wave 又は branch wave 又は conical wave と言う。

$\boxed{\text{Remark.}}$ いつも lateral wave が現われるかというとそうでない。たとえば (4.1)′ において lateral wave が生ずる原因となる項 $(\tau-\sum \partial_{\eta_i}\lambda_j(\xi_0,\eta_0)\eta_i)^{\mu_j}$ $(\mu_j \neq 1, 2, \ldots, m, \cdots)$ が現われるときはいつも $\gamma_j = 0$ となる場合がある。かかる場合は lateral wave は生じない。しかし S_2 に対応する反射波はいつも現れる。

例1
$$\begin{cases} P = (D_t^2 - D_x^2 - D_y^2)(a^2 D_t^2 - D_x^2 - D_y^2) & (a>1) \\ B_1 = 1, \quad B_2 = D_x \end{cases}$$

の場合について考えてみる。この場合 $R(\tau,\eta) = -1$ なので一様ロパチンスキー条件を満たしているので L^2-well posed である。$\sigma_0 = 1$, $\xi_0 = -\sqrt{a^2-1}$, $\eta_0 = 1$ $\xi_0' = \sqrt{a^2-1}$ で E_1 を局所化する。即ち定理1の様に $\exp\{-is(t\sigma_0 + x\xi_0 + y\eta_0 - l\xi_0')\} \times E_1(t, x, y, l)$ を s について漸近展開し、各 F_j を求める。

$$G_1 = \frac{\text{const.}\ \sqrt[+]{2(\tau-\eta)}}{(a^2\tau + \sqrt{a^2-1}\,\xi - \eta)(a^2\tau - \sqrt{a^2-1}\,\xi' - \eta)}$$



となるので lateral wave が生ずる。右図は伝播速度の遅い波が壁に衝突したとき(点線)の反射の状態を表わしたものである。実線で示した

L_1 及び L_2 は反射波である。 L_2 と $x=0$ との交点を A とし、A から L_1 に接線を引いたとき、その接点を B とする。 $\mathrm{supp}\,F_1$ を計算する事により 線分 AB は $\mathrm{sing\,supp}\,E_1$ に含まれる事が判る。この線分 AB に対応する wave の事を lateral wave 又は conical wave 又は branch wave と呼ぶのである。

例 2. $P = (D_t^2 - D_x^2 - D_y^2)(a^2 D_t^2 - D_x^2 - D_y^2)$ $(a>1)$

とおく。

i) $\{B_1 = 1,\ B_2 = D_x^2\}$, $\{B_1 = D_x,\ B_2 = D_x^3\}$ の場合は lateral wave は生じない。

ii) $\{B_1 = 1,\ B_2 = D_x\}$, $\{B_1 = D_x,\ B_2 = D_x^2\}$, $\{B_1 = 1,\ B_2 = D_x^3\}$ の場合、lateral wave は起こる。

References

[1] Atiyah-Bott-Gårding : Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients. I. Acta Math., 124 (1970), p. 109 ~ 189.

[2] G. F. D. Duff : On wave fronts, and boundary waves. Comm. Pure Appl. Math., vol. 17 (1964), p. 189 – 225.

[3] L. Hörmander : On the singularities of solutions of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math., vol. 23 (1970), p. 329 – 358.

[4] M. Matsumura : Localization theorem in hyperbolic mixed problems. Proc. Japan Academy, 47 (1971), p.115-119.

[5] R. Sakamoto : $\mathcal{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients.
J. Math. Kyoto Univ., vol. 14 (1974), p. 93-118.

[6] M. Tsuji : Analyticity of solutions of hyperbolic mixed problems. J. Math. Kyoto Univ., vol. 13 (1973), 323-371.

[7] ——— : Fundamental solutions of mixed problems for hyperbolic equations with constant coefficients.
(To appear in Proc. Japan Academy, 1975).